ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Φυλλάδιο 2

1 Εσωτερικό-Εξωτερικό γινόμενο

Άσκηση 1.1 Δείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{v} = (1, 2, 3)$, $\vec{w} = (2, 3, 1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Βρείτε μια βάση του $\mathbb{R}^3$ που περιέχει τα $\vec{v}$ και $\vec{w}$.

Άσκηση 1.2 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v} = (6, 4, -1)$, $\vec{w} = (3, -7, 2)$. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{w}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, έτσι ώστε η μία να έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{v}$.

Άσκηση 1.3 Να υπολογιστούν τα εξωτερικά γινόμενα των διανυσμάτων:

(α) $\vec{v} = (1, 0, 2)$, $\vec{w} = (2, 3, -1)$.

(β) $\vec{v} = (1, 2, 3)$, $\vec{w} = (3, 6, 9)$.

(γ) $\vec{v} = (-4, -2, -1)$, $\vec{w} = (1, 3, 0)$.

Άσκηση 1.4 Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $P(1, 2)$, $Q(2, 3)$ και $Z(-4, 3)$.

Άσκηση 1.5 Δύο μοναδιαία διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$ σχηματιζούν γωνία $\pi/4$. Βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με διαγώνιους τα διανύσματα $2\vec{v} - \vec{w}$, $4\vec{v} - 5\vec{w}$.

Άσκηση 1.6 Αν $\vec{v} + \vec{w} + \vec{z} = 0$, δείξτε ότι

$$\vec{v} \times \vec{w} = \vec{w} \times \vec{z} = \vec{z} \times \vec{v}.$$

Άσκηση 1.7 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v} = (1, 2, 3)$ και $\vec{w} = (7, 1, -3)$. Να λυθεί η διανυσματική εξίσωση

$$\vec{x} = \vec{v} + \vec{w} \times \vec{x}.$$

Άσκηση 1.8 Να αποδειχθεί η ανισότητα

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \times \vec{z} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \|\vec{z}\|.$$

Άσκηση 1.9 Να αποδειχθεί η ταυτότητα

$$\langle \vec{v}_1 \times \vec{v}_2, (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) \times (\vec{v}_3 \times \vec{v}_1) \rangle \leq \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 \rangle^2.$$

Άσκηση 1.10 Στον χώρο δίνονται δύο διανύσματα $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ τα οποία είναι μοναδιαία και κάθετα. Να αποδειχθεί η σχέση

$$\left[\Big((\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \times \vec{v}_2 \Big) \times \vec{v}_2 \right] \times \vec{v}_2 = \vec{v}_1.$$